JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 53, 231–245 (1983)

Étude d'une équation de Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes

PASCAL CHERRIER

Département de Mathématiques, C.S.P., Université de Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France

Communicated by the Editors

Received December 1982

On a compact Kähler manifold of complex dimension $m \geqslant 2$, let us consider the change of Kähler metric $g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\phi$. Let $F \in C^\infty(V \times R)$ be a function everywhere >0 and ν a real number $\neq 0$. When $0 < C^{-1} \leqslant F(x,t) \leqslant C(|t|^a + 1)$ for all $(x,t) \in V \times]-\infty, t_0]$, where C and t_0 are constants and $1 \leqslant a < m/(m-1)$, one exhibits a function $\phi \in C^\infty(V)$ such that $|g'| \, |g|^{-1} = e^{\nu\bar{\phi}} F(x, \phi - \bar{\phi})$ ($|g|$ and $|g'|$ the determinants of the metrics g and g', $\bar{\phi} = (\text{mes } V)^{-1} \int \phi \, dV$).

INTRODUCTION

Soient (V_{2m}, g) une variété kählérienne compacte, connexe, de dimension complexe $m \geqslant 2$, $g_{\lambda\bar{\mu}}$ l'expression locale du tenseur métrique ($\lambda, \mu \in [1,..., m]$) dans un système de coordonnées complexes adaptées $z^1,..., z^m$. Soit ϕ une fonction numérique C^∞ sur V dont $\partial_{\lambda\bar{\mu}}\phi$ désigne la dérivée partielle seconde par rapport à z^λ et $\overline{z^\mu}$. Considérons le changement de métrique kählérienne défini par:

$$g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\phi. \tag{1}$$

Il convient de supposer que ϕ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$ des fonctions admissibles c'est-à-dire telles qu'en tout point, la matrice hermitienne $(g'_{\lambda\bar{\mu}})$ soit définie positive. Notons $|g|$ et $|g'|$ les déterminants des métriques g et g' et posons:

$$M(\phi) = |g'| \, |g|^{-1} = \det_{1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant m} (\delta^\lambda_\mu + g^{\lambda\bar{\nu}} \partial_{\mu\bar{\nu}}\phi).$$

On sait, Proposition 1 de Aubin [2], que le changement de métrique kählérienne (1) conserve le volume. Nous supposerons une fois pour toutes ce volume égal à 1:

$$\int dV' = \int M(\phi) \, dV = \int dV = 1.$$

0022-1236/83 $3.00

Soit $G(x, t) \in C^\infty(V \times R)$. Considérons le problème de l'existence d'une fonction $\phi \in C^\infty(V)$ solution d'une équation de Monge–Ampère complexe du type:

$$\operatorname{Log} M(\phi) = G(x, \phi). \tag{$*$}$$

Le cas où $G(x, t) = \lambda t + h(x)$ ($\lambda \in R$, $h \in C^\infty(V)$) est important géométriquement car il est en liaison avec l'existence de métriques d'Einstein sur V et la conjecture de Calabi (toute forme de la première classe de Chern est forme de Ricci pour une certaine métrique kählérienne sur V). La question est réglée pour $\lambda > 0$ (Aubin [1]) et pour $\lambda = 0$ (Yau [5], Aubin [2]).

Plus généralement, Aubin [1, 2] a résolu ($*$) quand il existe deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et $\sup_{x \in V} G(x, a) = \inf_{x \in V} G(x, b) = 0$. Le cas $G'_t(x, t) > 0$ s'en déduit mais rien n'est encore connu si $G'_t < 0$, ce qui motive l'étude que nous allons faire.

Soient $F \in C^\infty(V \times R)$ une fonction partout >0 et ν un réel $\neq 0$. On cherche à mettre en évidence un élément $\phi \in \mathscr{A} \cap C^\infty(V)$ tel que:

$$M(\phi) = e^{\nu \bar{\phi}} F(x, \phi - \bar{\phi}), \qquad \bar{\phi} = \int \phi \, dV. \tag{2}$$

Utilisant les techniques développées par Aubin [2] et Delanoë [4], on procède en plusieurs étapes. On montre d'abord que les solutions de (2) sont bornées à priori dans $C^0(V)$ si:

$$0 < \liminf_{t \to -\infty} \left[\inf_{x \in V} F(x, t) \right]$$

et (3)

$$\limsup_{t \to -\infty} \left[|t|^{-a} \sup_{x \in V} F(x, t) \right] < \infty,$$

pour un réel $a \in [1, \alpha[$ où $\alpha = m/(m-1)$.

On en déduit des estimées à-priori jusqu'à l'ordre 5. Par un argument de point fixe, on résoud alors (2) sous les conditions (3).

Ce résultat pourrait être une étape dans la détermination d'une métrique d'Einstein sur V lorsque V est à première classe de Chern définie positive: ce problème correspond en effet au cas où $F(x, t) = e^{-\lambda t + h(x)}$ ($\lambda > 0$) et $\nu = -\lambda$.

THÉORÈME 1. *Soient ν un réel $\neq 0$ et $F \in C^0(V \times R)$ une fonction partout >0 possédant les deux propriétés* (3). *Il existe une constante H telle que toute fonction ϕ de classe C^2 solution d'une équation de la forme*:

$$M(\phi) = e^{\nu \bar{\phi}} [F(x, \phi - \bar{\phi})]^s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1, \tag{4}$$

vérifie $\|\phi\|_\infty \leqslant H$.

Démonstration. Soit $\phi \in C^2(V)$ une solution de (4). D'après Aubin [2, p. 67], elle est nécessairement admissible. Posons:

$$\psi = \phi - \bar{\phi} \qquad \text{et} \qquad F_s(x, t) = [F(x, t)]^s.$$

D'après l'hypothèse (3), il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que, pour tout $(x, t, s) \in V \times\,]-\infty, -1] \times [0, 1]$, on ait:

$$F_s(x, t) \geqslant C_1 \qquad \text{et} \qquad F_s(x, t) \leqslant C_2 \, |t|^a. \tag{5}$$

Toutes les constantes qui vont intervenir sont indépendantes de ϕ et de s.

(a) Comme ϕ est admissible, pour toute direction λ,

$$g_{\lambda\bar{\lambda}} + \partial_{\lambda\bar{\lambda}}\phi > 0$$

d'où, par sommation, si $\Delta = -\nabla^v \nabla_v$ est le laplacien de la métrique g,

$$m - \Delta\phi > 0. \tag{6}$$

En intégrant sur V l'inégalité vérifiée en tout point:

$$|\Delta\phi| \leqslant (m - \Delta\phi) + m,$$

on voit que:

$$\|\Delta\phi\|_1 \leqslant 2m. \tag{7}$$

Soit $G(x, y) \geqslant 0$ la fonction de Green de Δ. Par définition, en tout point $x \in V$, on a:

$$\phi(x) = \bar{\phi} + \int G(x, y)\, \Delta\phi(y)\, dV(y). \tag{8}$$

Puisque $G(x, y) \leqslant Cte[d(x, y)]^{2-2m}$ (d la distance géodésique sur V), si on définit, pour $u \in L^1$, la fonction Su par:

$$Su(x) = \int G(x, y)\, u(y)\, dV(y), \qquad x \in V,$$

l'opérateur S est continu de L^1 dans L^β quel que soit $\beta \in [1, \alpha[$, d'après le théorème de Sobolev (Berger [3, p. 33]). Par suite, il existe une constante A, qui ne dépend que de β et de la variété (V, g), telle que, compte tenu de (8) et (7), on ait:

$$\|\psi\|_\beta \leqslant A\, \|\Delta\phi\|_1 \leqslant 2mA. \tag{9}$$

La fonction ψ est donc estimée à priori dans L^β pour $1 \leqslant \beta < \alpha$. Elle est aussi majorée sur V indépendamment de ϕ. En effet, (6) et (8) impliquent que:

$$\psi \leqslant C_3 = m\left(\int G(x, y)\, dV(y)\right). \tag{10}$$

(b) Soit P un point où ϕ est maximum. Pour toute direction λ, $\partial_{\lambda\bar{\lambda}}\phi \leqslant 0$ et donc $[M(\phi)](P) \leqslant 1$. Ainsi, ϕ vérifiant l'équation (4),

$$e^{\nu\bar{\phi}} F_s(P, \psi(P)) \leqslant 1.$$

D'autre part, d'après la première inégalité (5),

$$F_s(x, t) \geqslant C_4^{-1} > 0,$$

pour tous $x \in V$, $t \leqslant C_3$ et $s \in [0, 1]$.

Par conséquent, compte tenu de (10),

$$e^{\nu\bar{\phi}} \leqslant [F_s(P, \psi(P))]^{-1} \leqslant C_4,$$

c'est-à-dire

$$\nu\bar{\phi} \leqslant \operatorname{Log} C_4. \tag{11}$$

(c) Nous allons maintenant utiliser le résultat essentiel suivant d'Aubin [2, p. 91]. Si $h(t)$ est une fonction numérique croissante et dérivable sur R, pour tout $u \in C^2(V)$, l'inégalité suivante est satisfaite:

$$\int h'(u)\, \nabla^\nu u\, \nabla_\nu u\, dV \leqslant m \int [1 - M(u)]\, h(u)\, dV. \tag{12}$$

Soient p un réel >1 et $l: R \to R$ une fonction C^1, croissante telle que $l(0) = 0$ et $l(t) = t\,|t|^{p-2}$ pour $|t| \geqslant 1$. Faisons, dans (12),

$$u = \phi \qquad \text{et} \qquad h(t) = l(t - \bar{\phi}).$$

Nous allons majorer le second membre de l'inégalité (12). Compte tenu que $h(\phi)$ est de même signe que ψ et que $|h(\phi)| \leqslant 1$ quand $|\psi| \leqslant 1$, si a est le réel défini dans (3), on a:

$$\int h(\phi)\, dV \leqslant \int_{\psi > 0} h(\phi)\, dV$$

$$\leqslant 1 + \int_{\psi > 1} \psi^{p-1}\, dV \leqslant 1 + \int |\psi|^{a+p-1}\, dV.$$

D'autre part, en faisant appel à (11) et à (5) et en notant:

$$C_5 = \sup\{F_s(x,t); x \in V, -1 \leqslant t \leqslant 0, 0 \leqslant s \leqslant 1\},$$

il vient:

$$\begin{aligned}
-\int M(\phi)\, h(\phi)\, dV \\
&\leqslant \int_{\psi<0} M(\phi)\,|h(\phi)|\, dV \\
&= \left[\int_{-1<\psi<0} + \int_{\psi\leqslant -1}\right] e^{\nu\bar{\phi}} F_s(x,\psi)\,|h(\phi)|\, dV \\
&\leqslant C_4\left[C_5 + C_2\int_{\psi\leqslant -1} |\psi|^{a+p-1}\, dV\right] \leqslant Cte\left[1 + \int |\psi|^{a+p-1}\, dV\right].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$m\int [1-M(\phi)]\, h(\phi)\, dV \leqslant C_6\left[1 + \int |\psi|^{a+p-1}\, dV\right]. \tag{13}$$

Comme $h'(\phi)\,|\nabla\phi|^2 \geqslant 0$, on minore ensuire le premier membre de (12) en écrivant:

$$\begin{aligned}
\int h'(\phi)\,|\nabla\phi|^2\, dV &\geqslant \int_{|\psi|\geqslant 1} h'(\phi)\,|\nabla\phi|^2\, dV \\
&= (p-1)\int_{|\psi|\geqslant 1} |\psi|^{p-2}\,|\nabla|\psi||^2\, dV \qquad (14)\\
&= \frac{4(p-1)}{p^2}\int_{|\psi|\geqslant 1} |\nabla|\psi|^{p/2}|^2\, dV.
\end{aligned}$$

Soit K une constante >0 déterminée par le théorème d'inclusion continue de Sobolev telle que, pour tout $u \in H_1$, on ait:

$$\|u\|_{2\alpha}^2 = \|u\|_{2m/(m-1)}^2 \leqslant K(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2). \tag{15}$$

Appliquons l'inégalité (15) à la fonction u_1 (resp. u_2) de H_1 égale à $|\psi|^{p/2}$ quand $\psi \geqslant 1$ (resp. $\psi \leqslant -1$) et à 1 quand $\psi < 1$ (resp. $\psi > -1$). On voit que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\psi\geqslant 1} \psi^{\alpha p}\, dV\right)^{1/\alpha} &\leqslant \|u_1\|_{2\alpha}^2 \\
&\leqslant K\left[\int_{\psi\geqslant 1} |\nabla\psi^{p/2}|^2\, dV + \int_{\psi\geqslant 1} \psi^p\, dV + \int_{\psi<1} dV\right]
\end{aligned}$$

et

$$\left(\int_{\psi \leqslant -1} |\psi|^{\alpha p}\, dV\right)^{1/\alpha} \leqslant \|u_2\|_{2\alpha}^2$$
$$\leqslant K\left[\int_{\psi \leqslant -1} |\nabla |\psi|^{p/2}|^2\, dV + \int_{\psi \leqslant -1} |\psi|^p\, dV + \int_{\psi > -1} dV\right].$$

Par conséquent, comme

$$\left(\int_{|\psi| < 1} |\psi|^{\alpha p}\, dV\right)^{1/\alpha} \leqslant 1,$$

en utilisant la majoration:

$$(x+y+z)^{1/\alpha} \leqslant 3^{1/\alpha}(x^{1/\alpha} + y^{1/\alpha} + z^{1/\alpha}), \qquad x, y \text{ et } z \geqslant 0,$$

on trouve:

$$\left(\int |\psi|^{\alpha p}\, dV\right)^{1/\alpha} = \left[\left(\int_{\psi \geqslant 1} + \int_{\psi \leqslant -1} + \int_{|\psi| < 1}\right) |\psi|^{\alpha p}\, dV\right]^{1/\alpha}$$
$$\leqslant 3^{1/\alpha} K\left[\int_{|\psi| \geqslant 1} |\nabla |\psi|^{p/2}|^2\, dV + \int_{|\psi| \geqslant 1} |\psi|^p\, dV + 2\right] + 3^{1/\alpha}$$
$$\leqslant K'\left[\int_{|\psi| \geqslant 1} |\nabla |\psi|^{p/2}|^2\, dV + \int_{|\psi| \geqslant 1} |\psi|^p\, dV + 1\right]$$

et, puisque $p \leqslant a + p - 1$, compte tenu de (14),

$$\|\psi\|_{\alpha p}^p \leqslant K'\left[\frac{p^2}{4(p-1)} \int h'(\phi)\, |\nabla\phi|^2\, dV + \int |\psi|^{a+p-1}\, dV + 1\right]. \tag{16}$$

Il résulte alors des relations (12), (13) et (16) que:

$$\|\psi\|_{\alpha p}^p \leqslant K'\left[\frac{C_6 p^2}{4(p-1)} + 1\right]\left[\int |\psi|^{a+p-1}\, dV + 1\right]. \tag{17}$$

(d) Venons en à l'estimation à priori de $\|\psi\|_\infty$. Comme $a < \alpha$ (hypothèse (3)), on peut choisir $p_0 > 1$ de telle sorte que $1 \leqslant a + p_0 - 1 < \alpha$. (9) nous dit que $\|\psi\|_{a+p_0-1} \leqslant Cte$ et donc, d'après (17),

$$\|\psi\|_{\alpha p_0} \leqslant Cte. \tag{18}$$

Définissons, par récurrence, les suites croissantes (p_k) et (q_k) en posant, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$p_{k+1} = \alpha p_k + 1 - a \qquad \text{et} \qquad q_k = \alpha p_k.$$

Ainsi, $p_{k+1}-\delta=\alpha(p_k-\delta)$ avec $\delta=(a-1)(\alpha-1)^{-1}\in[0,1[$ et donc:

$$p_k=\alpha^k(p_0-\delta)+\delta. \tag{19}$$

Désignons par D une constante telle que, pour $p\geqslant p_0$, on ait:

$$K'\left[\frac{C_6p^2}{4(p-1)}+1\right]\leqslant\frac{D}{2}p$$

et, par suite (voir (17)),

$$\|\psi\|^p_{\alpha p}\leqslant(D/2)p\left[\int|\psi|^{a+p-1}\,dV+1\right]. \tag{20}$$

Dans (20), faisons $p=p_{k+1}$, $k\geqslant 0$. Nous obtenons:

$$\|\psi\|^{p_{k+1}}_{q_{k+1}}\leqslant(D/2)p_{k+1}[\|\psi\|^{q_k}_{q_k}+1]. \tag{21}$$

Comme $q_k\to\infty$ et que $\|\psi\|_q$ est une fonction croissante de q, V étant de volume 1, on voit que ψ est estimé à priori dans L^q pour tout $q\geqslant 1$.

Ou bien $\|\psi\|_{q_k}\leqslant 1$ quel que soit k et alors $\|\psi\|_\infty\leqslant 1$.

Ou bien il existe un plus petit entier $k_0\geqslant 0$ tel que $\|\psi\|_{q_{k_0}}>1$. D'où, pour tout $k\geqslant k_0$,

$$\|\psi\|^{p_{k+1}}_{q_{k+1}}\leqslant Dp_{k+1}\,\|\psi\|^{q_k}_{q_k},$$

c'est-à-dire, en posant $v_k=\|\psi\|^{p_k}_{q_k}$,

$$v_{k+1}\leqslant Dp_{k+1}v_k^\alpha$$

et, par récurrence,

$$v_{k+1}\leqslant D^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{k-k_0}}p_{k+1}p_k^\alpha\cdots p_{k_0+1}^{\alpha^{k-k_0}}(v_{k_0})^{\alpha^{k-k_0+1}}.$$

Donc, comme il résulte de (19) que:

$$A\alpha^k\leqslant p_k\leqslant B\alpha^k,\qquad A \text{ et } B \text{ deux constantes,} \tag{22}$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}\|\psi\|_{q_k}&\\ &=\frac{1}{p_k}\operatorname{Log}v_k\leqslant\frac{(\alpha^{k-k_0}-1)\operatorname{Log}D}{A\alpha^k(\alpha-1)}+\frac{\alpha^{k-k_0}}{A\alpha^k}\operatorname{Log}v_{k_0}\\ &\quad+\frac{\operatorname{Log}\alpha}{A\alpha^k}\left[k+(k-1)\alpha+\cdots+(k_0+1)\,\alpha^{k-k_0-1}+\frac{\alpha^{k-k_0}-1}{\alpha-1}\operatorname{Log}B\right]\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{Log} D}{A(\alpha-1)} + A^{-1} \frac{\operatorname{Log} v_{k_0}}{\alpha^{k_0}} + \frac{\operatorname{Log} \alpha}{A} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{\alpha^l} + \frac{\alpha^{-k_0}}{\alpha - 1} \operatorname{Log} B \right]$$
$$\leqslant Cte,$$

car $\alpha > 1$ et $\alpha^{-k_0} \operatorname{Log} v_{k_0}$ est majoré indépendamment de k_0. C'est clair si $k_0 = 0$ puisque $\|\psi\|_{q_0}^{p_0} \leqslant Cte$ d'après (18). Si $k_0 > 0$, $\|\psi\|_{q_{k_0-1}} \leqslant 1$ par définition de k_0 et on déduit de (21) et (22) que

$$v_{k_0} = \|\psi\|_{q_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant (D/2)\, p_{k_0}(\|\psi\|_{q_{k_0-1}}^{q_{k_0-1}} + 1) \leqslant D p_{k_0} \leqslant DB\alpha^{k_0}$$

et

$$\alpha^{-k_0} \operatorname{Log} v_{k_0} \leqslant \sup_{l>0}(l\alpha^{-l}) \operatorname{Log} \alpha + \operatorname{Log} DB = Cte < \infty.$$

Ainsi, dans tous les cas, $\|\psi\|_{q_k}$ est majoré indépendamment de ϕ et k; d'où:

$$\|\psi\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|\psi\|_{q_k} \leqslant C_7 < \infty. \tag{23}$$

(e) Par continuité de F,

$$F_s(x, \psi) \leqslant C_8 = \sup\{F_s(x, t); x \in V, |t| \leqslant C_7, s \in [0, 1]\} < \infty.$$

Plaçons-nous en un point Q où ϕ est minimum. Alors $[M(\phi)](Q) \geqslant 1$ c'est-à-dire $e^{\nu\bar{\phi}} F_s(Q, \psi(Q)) \geqslant 1$. Par suite,

$$e^{\nu\bar{\phi}} \geqslant [F_s(Q, \psi(Q))]^{-1} \geqslant C_8^{-1}$$

donc, compte tenu de (11) et (23), nous avons:

$$|\bar{\phi}| \leqslant Cte \qquad \text{puis} \qquad \|\phi\|_\infty \leqslant \|\psi\|_\infty + |\bar{\phi}| \leqslant Cte,$$

d'où le Théorème 1.

THÉORÈME 2. *Soient β et γ deux réels de l'intervalle* $]0, 1[$, *$F \in C^{3,\beta}(V \times R)$ une fonction partout >0 et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions des équations* (4) *appartenant à $C^{2,\gamma}$. Supposons $\mathscr{S}$ borné dans $C^0(V)$.*

Dans ces conditions, $\mathscr{S}$ est une partie bornée de $C^{5,\beta}(V)$.

Démonstration. Elle est analogue à celle d'Aubin [2, p. 89]. Précisons néanmoins.

Soit $\phi \in \mathscr{S}$. Par suite, il existe un réel $s \in [0, 1]$ tel que

$$\operatorname{Log} M(\phi) = \nu\bar{\phi} + sG(x, \psi) \tag{24}$$

où $G(x, t) = \operatorname{Log} F(x, t)$ et $\psi = \phi - \bar{\phi}$.

$\mathscr{S}$ étant borné dans C^0, notons C une constante telle que:

$$\|\phi\|_\infty \leqslant C, \qquad |\bar{\phi}| \leqslant C \qquad \text{et} \qquad \|\psi\|_\infty \leqslant C. \tag{25}$$

(a) D'après Aubin [2, p. 67] et le théorème de régularité de Giraud–Hopf, $\phi \in \mathscr{A} \cap C^{4,\gamma}$ puisque $\phi \in C^{2,\gamma}$ et que le second membre de (24) appartient à $C^{2,\gamma}$. Par conséquent, $\nu\bar{\phi} + sG(x, \psi) \in C^{3,\beta}$ et $\phi \in C^{5,\beta}$ par le théorème de régularité. Nous allons montrer que $\mathscr{S}$ est un borné de $C^{2,\delta}$ quel que soit $\delta \in \,]0, 1[$.

L'ensemble:

$$\mathscr{C} = \{\operatorname{Log} M(\phi)\}_{\phi \in \mathscr{S}} = \{\nu\bar{\phi} + sG(x, \psi)\}_{\phi \in \mathscr{S}}$$

sera alors borné dans $C^{2,\delta}$ donc $\|\phi\|_{C^{4,\delta}} \leqslant Cte$. Puis $\mathscr{C}$ est borné dans $C^{3,\beta}$ et ainsi, toujours d'après Giraud–Hopf, $\mathscr{S}$ est un borné de $C^{5,\beta}$.

(b) Remarquons d'abord que:

$$m - \Delta\phi = g'_{\lambda\bar{\mu}}\, g^{\lambda\bar{\mu}} \geqslant Cte > 0$$

(la métrique g' est défini en (1)). En effet, $m - \Delta\phi$ est égal à la trace de la matrice $(\delta^\lambda_\mu + g^{\lambda\bar{\nu}}\, \partial_{\mu\bar{\nu}}\phi)$ dont toutes les valeurs propres sont positives et dont $M(\phi)$ est, par définition, le déterminant. Comme la moyenne géométrique est au plus égale à la moyenne arithmétique, on voit que:

$$m - \Delta\phi \geqslant m[M(\phi)]^{1/m} = m[e^{\nu\bar{\phi}}(F(x, \psi))^s]^{1/m}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (25) et de la continuité de $F > 0$,

$$m - \Delta\phi \geqslant C_1 = m[e^{-|\nu|C} \min(1, \inf\{F(x, t); x \in V, |t| \leqslant C\})]^{1/m} > 0$$

et (26)

$$\left|\frac{\Delta\phi}{m - \Delta\phi}\right| \leqslant C_2 = \max\left(1, \frac{m}{C_1} - 1\right).$$

(c) Soient k et l deux constantes $\geqslant 0$ que nous choisirons ultérieurement (quand $F(x, t)$ ne dépend pas de t, on prend $l = 0$). Posons:

$$B = \operatorname{Log}(m - \Delta\phi) - k\phi + (l/2)\,\phi^2. \tag{27}$$

ϕ étant C^5, calculons $\Delta' B$, où Δ' désigne le laplacien dans la métrique g':

$$\begin{aligned} \Delta' B = &-(m - \Delta\phi)^{-1}\,\Delta'\,\Delta\phi - k\,\Delta'\phi + (m - \Delta\phi)^{-2}\, g'^{\lambda\bar{\mu}}\, \nabla_\lambda \Delta\phi\, \nabla_{\bar{\mu}} \Delta\phi \\ &+ l\phi\,\Delta'\phi - l g'^{\lambda\bar{\mu}}\, \nabla_\lambda\phi\, \nabla_{\bar{\mu}}\phi. \end{aligned} \tag{28}$$

Comme l'équation (24) est satisfaite,

$$s\,\Delta G(x,\psi)=\Delta\,\mathrm{Log}\,M(\phi)=g'^{\alpha\bar\beta}g'^{\lambda\bar\mu}\,\nabla^\sigma\nabla_{\alpha\bar\mu}\phi\,\nabla_\sigma\nabla_{\lambda\bar\beta}\phi-\Delta'\Delta\phi+E, \quad (29)$$

où $E=-R_{\lambda\bar\mu}\nabla^\lambda_\sigma\phi g'^{\sigma\bar\mu}+R_{\alpha\bar\beta\lambda\bar\mu}\nabla^{\alpha\bar\beta}\phi g'^{\lambda\bar\mu}$ vérifie une inégalité de la forme:

$$|E|\leqslant C_3(m-\Delta\phi)\,g'^{\lambda\bar\mu}g_{\lambda\bar\mu},$$

avec C_3 une constante ne dépendant que de la courbure de la variété (V,g).

Reportons dans (28) l'expression de $\Delta'\Delta\phi$ tirée de (29). Tenant compte du fait que $\Delta'\phi=g'^{\lambda\bar\mu}g_{\lambda\bar\mu}-m$ et (voir Aubin [2, p. 74])

$$g'^{\alpha\bar\beta}g'^{\lambda\bar\mu}\nabla^\sigma\nabla_{\alpha\bar\mu}\phi\,\nabla_\sigma\nabla_{\lambda\bar\beta}\phi\geqslant(m-\Delta\phi)^{-1}\,g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_\lambda\Delta\phi\,\nabla_{\bar\mu}\Delta\phi,$$

si nous nous plaçons en un point P où B est maximum et donc $\Delta'B(P)\geqslant 0$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}(k-C_3)\,g'^{\lambda\bar\mu}g_{\lambda\bar\mu}\leqslant J=s(m-\Delta\phi)^{-1}\,\Delta G(P,\psi)+mk&\\ +l\phi\,\Delta'\phi-lg'^{\lambda\bar\mu}\,\nabla_\lambda\phi\,\nabla_{\bar\mu}\phi.&\quad (30)\end{aligned}$$

Développons $\Delta G(x,\psi)$:

$$\begin{aligned}\Delta G(x,\psi)=\Delta_x G(x,\psi)-2\nabla^\alpha_x G'_t(x,\psi)\,\nabla_\alpha\phi&\\ -G''_t(x,\psi)\,|\nabla\phi|^2+G'_t(x,\psi)\,\Delta\phi.&\quad (31)\end{aligned}$$

Au membre de droite J de (30), les termes où interviennent des dérivées premières de ϕ s'écrivent donc:

$$\begin{aligned}J_1&=-s(m-\Delta\phi)^{-1}\,[2\nabla^\alpha_x G'_t(P,\psi)\,\nabla_\alpha\phi+G''_t(P,\psi)\,|\nabla\phi|^2]\\ &\quad-lg'^{\lambda\bar\mu}\,\nabla_\lambda\phi\,\nabla_{\bar\mu}\phi\\ &\leqslant C_4(m-\Delta\phi)^{-1}\,(|\nabla\phi|^2+1)-lg'^{\lambda\bar\mu}\,\nabla_\lambda\phi\,\nabla_{\bar\mu}\phi,\end{aligned}$$

car les dérivées partielles de G d'ordre $\leqslant 2$ sont uniformément bornées sur le compact $\{(x,\psi);\ x\in V,\ |\psi|\leqslant C\}$. Or, en se plaçant dans un repère orthonormé en P pour lequel $\partial_{\lambda\bar\mu}\phi=0$ si $\lambda\neq\mu$, on constate que

$$g'^{\lambda\bar\mu}\nabla_\lambda\phi\,\nabla_{\bar\mu}\phi\geqslant(m-\Delta\phi)^{-1}\,|\nabla\phi|^2.$$

Ainsi, puisque, d'après (26), $C_4(m-\Delta\phi)^{-1}\leqslant C_5$,

$$J_1\leqslant(C_4-l)(m-\Delta\phi)^{-1}\,|\nabla\phi|^2+C_5.$$

Prenons $l = C_4$ d'où $J_1 \leqslant C_5$ et (30) devient:

$$\begin{aligned}(k - C_3)\, g'^{\lambda\bar\mu} g_{\lambda\bar\mu} &\leqslant (J - J_1) + J_1 \leqslant s(m - \Delta\phi)^{-1}\, [\Delta_x G(P, \psi) + G'_t(P, \psi)\, \Delta\phi] \\ &\quad + mk + C_4 \phi(g'^{\lambda\bar\mu} g_{\lambda\bar\mu} - m) + C_5 \\ &\leqslant C_6(g'^{\lambda\bar\mu} g_{\lambda\bar\mu} + 1),\end{aligned}$$

ϕ, ψ, $(m - \Delta\phi)^{-1}$ et $(m - \Delta\phi)^{-1}\, \Delta\phi$ étant uniformément bornées d'après (25) et (26). En conséquence, si $k = 1 + C_3 + C_6$,

$$0 < g'^{\lambda\bar\mu} g_{\lambda\bar\mu}(P) \leqslant C_6.$$

D'où on déduit, toujours dans un repère adapté en P,

$$\sum_\lambda (1 + \partial_{\lambda\bar\lambda}\phi)^{-1} \leqslant C_6.$$

Or, d'après (25), ϕ vérifiant l'équation (4),

$$M(\phi) \leqslant C_7 = e^{|v|C} \max(1, \sup\{F(x, t);\, x \in V,\, |t| \leqslant C\}).$$

Ainsi, pour toute direction μ, au point P,

$$(1 + \partial_{\mu\bar\mu}\phi) = M(\phi) \prod_{\lambda \neq \mu} (1 + \partial_{\lambda\bar\lambda}\phi)^{-1} \leqslant C_7 C_6^{m-1}$$

et, par suite,

$$(m - \Delta\phi)(P) = \sum_\mu g'_{\mu\bar\mu}(P) \leqslant C_8 = mC_7 C_6^{m-1}.$$

Il résulte alors de la définition (27) de B, du fait que $B \leqslant B(P)$ et de (25) que, partout, on a:

$$\operatorname{Log}(m - \Delta\phi) \leqslant \operatorname{Log}(m - \Delta\phi)(P) + 2\, \|k\phi - (l/2)\, \phi^2\|_\infty \leqslant Cte$$

et, comme $\Delta\phi < m$,

$$|\Delta\phi| \leqslant C', \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}.$$

Puisque $0 < A_1 \leqslant M(\phi) \leqslant A_2$, il s'ensuit aisément que les métriques $(g'_\phi)_{\phi \in \mathscr{S}}$ sont équivalentes à g.

En outre, $\mathscr{S}$ est borné, quel que soit $q > 1$, dans l'espace de Sobolev H_2^q (dont la topologie peut être définie par la norme $u \to \|u\|_q + \|\Delta u\|_q$) donc, aussi, dans C^1. On voit alors que, dans l'inegalité (29),

$$\|s\, \Delta G(x, \psi)\|_\infty \leqslant Cte \qquad \text{(cf. (31)) et} \qquad \|E\|_\infty \leqslant Cte. \tag{32}$$

(d) On prouve ensuite que l'ensemble $\{\Delta\phi\}_{\phi \in \mathscr{S}}$ est borné dans H_1^q, pour tout $q \geqslant 1$. La démonstration est celle du lemme 3 d'Aubin [2, p. 75].

Compte tenu de l'équivalence des métriques $(g'_\phi)_{\phi\in\mathscr{S}}$, pour borner à priori $\|\nabla\Delta\phi\|_q$, il suffit d'estimer dans L^q la norme suivante des dérivées troisièmes mixtes de ϕ:

$$|\psi| = [g'^{\alpha\bar{\beta}} g'^{\lambda\bar{\mu}} g'^{\nu\bar{\gamma}} \nabla_\alpha \nabla_{\nu\bar{\mu}}\phi \, \nabla_{\bar{\beta}} \nabla_{\lambda\bar{\gamma}}\phi]^{1/2}.$$

Pour ce faire, on développe $\Delta' |\psi|^2$, ce qui est licite car ϕ est C^5, et on utilise le lemme 2 d'Aubin [2] ainsi que les relations (29) et (32).

Ainsi, quel que soit $q \geqslant 1$, $\mathscr{S}$ est borné dans l'espace H_3^q (dont la topologie peut être définie, pour $q > 1$, par la norme

$$u \to \|u\|_q + \|\nabla\Delta u\|_q).$$

D'où, d'après le théorème de Sobolev, $\mathscr{S}$ est borné dans $C^{2,\delta}$ quel que soit $\delta \in]0,1[$ puisque l'inclusion $H_3^q \subset C^{2,\delta}$ est continue si $q > n/(1-\delta)$.

Le paragraphe (a) montre enfin que $\mathscr{S}$ est borné dans $C^{5,\beta}$, ce qui achève la preuve du Théorème 2.

THÉORÈME 3. (i) *Soient $\beta \in]0,1[$ et $\nu \neq 0$ deux réels, $h \in C^{3,\beta}(V)$ une fonction partout >0. L'équation*:

$$M(\phi) = e^{\nu\bar{\phi}} h \tag{33}$$

admet une solution $C^{5,\beta}$admissible et une seule.

(ii) *La famille des solutions correspondant à un ensemble $(h_i)_{i\in I}$ tel que $\|\mathrm{Log}\, h_i\|_{C^{3,\beta}} \leqslant Cte$ est bornée dans $C^{5,\beta}$.*

Démonstration. (a) Examinons d'abord l'unicité. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions de (33) de classe C^2, donc admissibles, $g_i = (g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\phi_i)$ les métriques correspondantes $(i = 1, 2)$ et $\phi = \phi_2 - \phi_1$. En choisissant en tout point un repère g-orthonormé pour lequel $\partial_{\lambda\bar{\mu}}\phi_1 = 0$ si $\lambda \neq \mu$, on vérifie que:

$$|g_2|\,|g_1|^{-1} = \det_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant m} (\delta^\lambda_\mu + g_1^{\lambda\bar{\nu}}\,\partial_{\mu\bar{\nu}}(\phi_2 - \phi_1)) \equiv M_1(\phi).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(M(\phi_2)[M(\phi_1)]^{-1}) &= \mathrm{Log}(|g_2|\,|g_1|^{-1})\\ &= \mathrm{Log}\, M_1(\phi) = \nu\bar{\phi}.\end{aligned}$$

Au maximum (resp. minimum) de ϕ, $M_1(\phi)$ est $\leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$) d'où $\nu\bar{\phi} = 0$ et $\bar{\phi} = 0$ car $\nu \neq 0$. Ainsi $M_1(\phi) \equiv 1$. On voit alors que ϕ est constante donc $\equiv 0$ en utilisant, dans la métrique g_1 (∇^1 et dV_1 dénotent le gradient et l'élément de volume correspondants), l'inégalité (12) d'Aubin où l'on prend $h(t) = t$:

$$\int |\nabla^1\phi|^2\, dV_1 \leqslant m \int [1 - M_1(\phi)]\phi\, dV_1 = 0.$$

(b) D'après Aubin [2] et Yau [5], il existe une fonction $\tilde{\phi} \in C^\infty(V)$, unique aux constantes additives près, telle que:

$$M(\tilde{\phi}) = \left[\int h\, dV\right]^{-1} h. \tag{34}$$

(34) est l'équation de la conjecture de Calabi. On la résoud indifféremment par la technique variationnelle ou la méthode de continuité.

Soit alors

$$s = -\int \tilde{\phi}\, dV - \frac{1}{\nu} \operatorname{Log} \int h\, dV.$$

$\phi = \tilde{\phi} + s$ est la solution de (33).

(c) La partie (ii) de l'énoncé se déduit des Théorèmes 1 et 2. En particulier, l'estimée C^0 pour la solution ϕ de l'équation (33) ne dépend de h que par ses extrema sur V et donc par $\|\operatorname{Log} h\|_\infty$. La démonstration est d'ailleurs plus simple que celle du Théorème 1.

Soit $A \geqslant 1$ un réel tel que $A^{-1} \leqslant h \leqslant A$. En se plaçant au maximum P puis au minimum Q de ϕ, on écrit que:

$$e^{\nu\bar{\phi}} \leqslant [h(P)]^{-1} \leqslant A$$

et

$$e^{\nu\bar{\phi}} \geqslant [h(Q)]^{-1} \geqslant A^{-1}.$$

Donc,

$$|\bar{\phi}| \leqslant Cte \qquad \text{et} \qquad M(\phi) \leqslant Cte. \tag{35}$$

Choisissons un réel p_0 dans l'intervalle $]1, m/(m-1)[$. D'après (9) et (35),

$$\|\phi\|_{p_0} \leqslant Cte.$$

On applique alors l'inégalité (12) où l'on prend $u = \phi$, $h = l$, $p \geqslant p_0$ (ainsi $h(\phi) = \phi\,|\phi|^{p-2}$ en tout point où $|\phi| \geqslant 1$). Un raisonnement analogue à celui des paragraphes (c) et (d) de la preuve du Théorème 1 conduit à une majoration de la forme (cf. (20)):

$$\|\phi\|_{\alpha p}^{p} \leqslant (D/2)\, p(\|\phi\|_p^p + 1),$$

c'est-à-dire, en notant $p_k = \alpha^k p_0$ pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\|\phi\|_{p_{k+1}}^{p_k} \leqslant (D/2)\, p_k(\|\phi\|_{p_k}^{p_k} + 1).$$

D'où, on conclut que $\|\phi\|_\infty \leqslant D'$, où D' est une constante qui ne dépend que de A et de la variété (V, g).

Quand à l'estimée $C^{2,\beta}$(resp. $C^{5,\beta}$) de ϕ, un examen de la preuve du Théorème 2 montre qu'elle n'est fonction de h que par la norme C^2 (resp. $C^{3,\beta}$) de Log h.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver, à la manière de Delanoë [4], le:

THÉORÈME 4. *Soient k un entier $\geqslant 3$, $\beta \in]0, 1[$ et $F \in C^{k,\beta}(V \times R)$ une fonction partout >0 vérifiant les hypothèses* (3).

L'équation (2) *admet alors une solution $C^{k+2,\beta}$-admissible.*

Démonstration. Considérons le Banach $B = C^{3,\beta}(V)$. A tout couple $(\psi, s) \in B \times [0, 1]$ correspond, d'après le Théorème 3, une fonction $\phi_s = K(\psi, s) \in B$ et une seule telle que:

$$M(\phi_s) = e^{\nu \bar{\phi}_s}[F(x, \psi - \bar{\psi})]^s. \tag{36}$$

K possède les propriétés suivantes.

(1) $K(\psi, 0) \equiv 0$ (cf. l'unicité des solutions de l'équation (33)).

(2) L'ensemble des points fixes éventuels des équations (36), i.e.

$$\{\phi \in B; K(\phi, s) = \phi \text{ pour une valeur de } s \in [0, 1]\},$$

est borné dans B: ceci découle des Théorèmes 1 et 2.

(3) A ψ fixé, l'application $s \to K(\psi, s)$ est continue de $[0, 1]$ dans B. Sinon, il existerait une suite (s_i) de réels compris entre 0 et 1 et un nombre $\rho > 0$ tels que $\lim_{i \to \infty} s_i = s$ et

$$\|\phi_{s_i} - \phi_s\|_B \geqslant \rho, \qquad \text{pour tout } i. \tag{37}$$

Les Théorèmes 1 et 2 impliquent que la suite (ϕ_{s_i}) est bornée dans $C^{5,\beta}$. D'après Ascoli, on peut donc en extraire une sous-suite (ϕ_{s_j}) convergente dans B, de limite ϕ. Par suite,

$$M(\phi) - e^{\nu \bar{\phi}}[F(x, \psi - \bar{\psi})]^s = \lim_{j \to \infty} [M(\phi_{s_j}) - e^{\nu \bar{\phi}_{s_j}}[F(x, \psi - \bar{\psi})]^{s_j}] = 0.$$

Ainsi, $\phi = \phi_s$ et $\lim_{j \to \infty} \|\phi_{s_j} - \phi_s\|_B = 0$, ce qui contredit (37).

(4) s étant fixé, $\psi \to K(\psi, s)$ est un opérateur compact de B.

En effet, soient Γ un borné de B et $\Gamma' = \{K(\psi, s)\}_{\psi \in \Gamma}$. Puisqu'il existe deux constantes A_1 et $A_2 > 0$ telles que, pour tout $\psi \in \Gamma$,

$$\|[F(x, \psi - \bar{\psi})]^s\|_B \leqslant A_1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in V} [F(x, \psi - \bar{\psi})]^s \geqslant A_2,$$

il résulte du Théorème 3 que Γ' est borné dans $C^{5,\beta}$ donc relativement compact dans $C^{3,\beta} = B$.

D'autre part, on montre que l'application $K(\cdot, s)$ est continue en procédant par l'absurde comme à l'alinéa (3).

Compte tenu des propriétés (1) à (4), nous pouvons appliquer le théorème du point fixe (Berger [3, p. 270]) qui nous dit que l'opérateur compact $K(\cdot, 1)$ admet un point fixe ϕ, donc tel que:

$$M(\phi) = e^{\nu\tilde{\phi}} F(x, \phi - \bar{\phi}).$$

D'après Giraud–Hopf, ϕ est en fait une fonction $C^{k+2,\beta}$-admissible.

Références

1. T. Aubin, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählérienne compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **283** (1976), 119–121.
2. T. Aubin, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *Bull. Sci. Math.* (2) **102** (1978), 63–95.
3. M. S. Berger, "Non-linearity and functional analysis," Academic Press, New York, 1977.
4. P. Delanoë, Equations du type de Monge–Ampère sur les variétés riemanniennes compactes, II, *J. Funct. Anal.* **41** (1981), 341–353.
5. S. T. Yau, On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339–411.